第 10 講　数学Ⅲ ― その 1 ―

39　α，β，γ は相異なる複素数で，

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

を満たすとする．このとき α，β，γ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か．（ただし，複素平面を複素数平面ともいう．）

《05 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40 複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

《04 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

41　次の各問に答えよ.

(1)　a が正の実数のとき $\lim_{n \to \infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2)　定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ.

(2) $a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ.

《15京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　数学Ⅲ ―その1―

39　α, β, γ は相異なる複素数で，

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

を満たすとする．このとき α, β, γ の表す複素平面上の3点を結んで得られる三角形はどのような三角形か．(ただし，複素平面を複素数平面ともいう.)

《05 京大・理系》

【答】　重心が0の正三角形

【解説】　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2}$ より $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$　…①

　また $\alpha+\beta+\gamma=0$ より得られる $\gamma=-\alpha-\beta$ を①に代入すると

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)(-\alpha-\beta)=0 \iff \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$　…②を得る．

　ここで $\alpha=0$ とすると②より $\beta^2=0$ つまり $\beta=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ であることに矛盾．

よって $\alpha\neq0$

よって② $\iff$ $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$ より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順)

　また対称性より同様に $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順) を得る．

　このとき β と γ は，原点Oを中心として α の点を $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点ということになるが，

$\beta\neq\gamma$ より $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $\dfrac{\beta}{\alpha}=\cos\left(\mp\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順)

に決まる．

　よって α, β, γ の表す複素平面上の3点を結んで得られる三角形は**重心が0の正三角形**.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40 複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

《04 京大・理系》

【答】 略

【解説】 円 C の中心を β，半径を r とすると，円の式は

$$|z-\beta|=r \iff (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})=r^2$$
$$\iff z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+|\beta|^2-r^2=0$$

と表すことができる．

この円が 1，-1，α を通るので

$$1-\overline{\beta}-\beta+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$1+\overline{\beta}+\beta+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ②$$
$$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

①と②より $\overline{\beta}+\beta=0$，$1+|\beta|^2-r^2=0$ を得るが，これと③より

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}-1=0$ …④

このとき $f(z)=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+|\beta|^2-r^2$ とおくと，$1+|\beta|^2-r^2=0$ より

$f(z)=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}-1$ であるが

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right) &= -\frac{1}{\overline{\alpha}}\overline{\left(-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)}-\overline{\beta}\left(-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)-\beta\overline{\left(-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)}-1 \\ &= \frac{1}{\overline{\alpha}\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}+\frac{\beta}{\alpha}-1 \\ &= -\frac{\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}-1}{\alpha\overline{\alpha}}=0 \quad (\because ④) \end{aligned}$$

となり，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

41 次の各問に答えよ.

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

《12 京大・理系》

【答】 (1) $\begin{cases} a & (a\geqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (0<a<1 \text{ のとき}) \end{cases}$ (2) $\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2+\frac{\pi}{12}$

【解説】 (1) $a\geqq 1$ のとき $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}$ であるが, $1^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ と

$\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ より $a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}\to a\ (n\to\infty)$

$0<a<1$ のとき $1^{\frac{1}{n}}<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$ と $\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ より $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$

以上より $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases} \boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a\geqq 1} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{0<a<1} \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\,dx$ に部分積分を用いると

$$\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

となる.

ここで $\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4+\log 2\right)=\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2$ であり,

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$ で $x=\tan\theta$ と置換積分すると

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$ なので,

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2+\frac{\pi}{12}}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ.

《15 京大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　1

【解説】 (1)　$y=e^x+1$ より $y'=e^x$ なので，$x=t$ における $y=e^x+1$ の接線は

$$y=e^t(x-t)+(e^t+1) \qquad \therefore\quad y=e^tx+(1-t)e^t+1$$

この直線が $(a,\ 0)$ を通るとき

$$0=e^ta+(1-t)e^t+1 \iff a=-e^{-t}+t-1$$

となる．この式を t の方程式とみて，この方程式の実数解がただ 1 つだけであることを示せばよい．$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと $f'(t)=e^{-t}+1>0$ で $\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$，$\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ より $f(t)=a$ は任意の a に対して実数解をただ 1 つだけもつ.

よって，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つであることが示された.

(2)　(1)より $a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1 \iff a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}$ が成り立つが，

$a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}>1$ より $a_n>a_1+(n-1)\cdot 1=n$ となるので，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ つまり $\lim_{n\to\infty}e^{-a_{n+1}}=0$.

よって $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\mathbf{1}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。